Är tomma parenteser verkligen tomma?

Varför tycker så många att algebra, d v s räknandet med bokstäver är så besvärligt? Varför upplever de algebran som meningslösa manipulationer med bokstäver? En kvalificerad gissning kanske kan vara att de studerande inte har klart för sig att bokstäverna står som **symboler för tal** och att den stora fördelen är att man mycket lättare kan formulera strukturer och regler.
I min undervisning har jag tidvis låtit bokstäverna ersättas av tomma parenteser, och i behövliga fall, med index nere till höger. Som följd härav har eleverna visat ökad förståelse för matematiska strukturer. Härledandet av deriveringsregler har gått smidigare. Vill man att eleverna skall få känsla för ämnet matematik måste de lära sig att förstå strukturer och var regler kommer ifrån!
De flesta elever på gymnasiet i årskurs 1 kan kvadreringsreglerna bra utantill. Men om man ber dem att berätta i enbart ord, d v s utan att använda bokstäverna a och b, vad t ex $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ utsäger, kommer de ofta till korta. Låt oss skriva denna regel med parenteser:

$[(\quad)_1 + (\quad)_2]^2 = (\quad)_1^2 + 2(\quad)_1(\quad)_2 + (\quad)_2^2$

1:a kvadreringsregeln är nu lättare för eleven att utsäga i enbart ord: Summan av två tal i kvadrat är lika med det första talet i kvadrat, plus två gånger det första talet gånger det andra talet, plus det andra talet i kvadrat; under tiden utsägandet bör eleven **peka** på motsvarande parenteser, och på potenstvåan då han säger: två gånger första parentesen....
Det rekommenderas även att eleverna **skriver ned** denna mening. Hela detta förfaringssätt underlättar dessutom memoreringen.
För att få eleven att bättre förstå användbarheten bör denne ofta få skriva och använda vår kvadreringsregel ”baklänges”:

- $(\quad)_1^2 + 2(\quad)_1(\quad)_2 + (\quad)_2^2 = [(\quad)_1 + (\quad)_2]^2$

Naturligtvis göres samma sak för 2:a kvadreringsregeln och för konjugatregeln!

Några enkla exempel:

1) Sätt in talen 3 resp 4 i de tomma parenteserna:

$[(\ 3\ )_1 + (\ 4\ )_2]^2 = (\ 3\ )_1^2 + 2(\ 3\ )_1(\ 4\ )_2 + (\ 4\ )_2^2 =$

$= 9 + 2\cdot3\cdot4 + 16 = 9 + 24 + 16 = 49$

2) Sätt på samma vis in x och 2:

$[(\ x\ )_1 + (\ 2\ )_2]^2 = (\ x\ )_1^2 + 2(\ x\ )_1(\ 2\ )_2 + (\ 2\ )_2^2 = x^2 + 4x + 4$

3) Välj -1 och x:

$[(\ -1\ )_1 + (\ x\ )_2]^2 = (\ -1\ )_1^2 + 2(\ -1\ )_1(\ x\ )_2 + (\ x\ )_2^2 = 1 - 2x + x^2$

4) Förenkla $(\ x+11)_1^2 - (\ x-10\ )_2^2 =$

$= [(\ x+11)_1 - (\ x-10\ )_2]\ [(\ x+11)_1 + (\ x-10\ )_2] = [11+10\ ]\cdot[2x+11-10] =$

$= 21\cdot[2x+1] = 42x+21$

Att använda tomma parenteser i dessa enkla exempel är kanske att slå ihjäl mygg med hammare, åtminstone på gymnasienivå.

Parenteser är även lämpliga för härledandet av formeln för 2:a-gradsekvationen:

$x^2 = a$, $a > o$, kan sägas vara ”urtypen” för 2:a-gradsekvationen med lösningen

$x = \pm\sqrt{a}$. Med tom parentes ersätter man x^2 med $(\quad)^2 = a$ och får

följaktligen $(\quad) = \pm\sqrt{a}$. För att lösa ekvationen $x^2 + px + q = 0$ är det ju

lämpligt att få denna på formen $(\quad)^2 = a$, d v s $(x + b)^2 = a$. Vad blir b?

$(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$, som ju ger att $b= p/2$, o s v .

För att eleverna lättare skall komma på knepet som löser t ex $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

kan man låta dem skriva $x^3 = (\ )$, som ger $(\quad)^2 - 9(\quad) + 8 = 0$ med lösningen

$(\ ) = 1$ eller $(\ ) = 8$, d v s $x^3 = 1$ eller $x^3 = 2$, d v s $x = 1$ eller $x = 2$

Ovannämnda enkla exempel är bra som förövning när eleverna skall lära sig

funktionsbegreppet.

Exempel: Det ger bättre förståelse av strukturen hos en funktion om man i stället för t ex $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ skriver

$$f(\ ) = 3(\ )^2 - 2(\ ) + 5 \qquad (1)$$

som är en funktion, medan $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ är ett funktions**värde** y.

Parentesen visar funktionens struktur oavsett om man sätter in ett **tal** eller ett **uttryck**. Exempel:

Sätt in **talet** –4 : $f(-4) := 3(-4)^2 - 2(-4) + 5 = 48 + 8 + 5 = 61$

Sätt in **uttrycket** x+1 : $f(x+1) = 3(x+1)^2 - 2(x+1) + 5 = 3x^2 + 4x + 3 = g(x)$

Låt alltså eleverna först skriva funktionen med de tomma parenteserna och sedan sätta in ett **tal** i parenteserna resp. **uttryck.**

Ibland ser man strukturen hos formler lättare med tomma parenteser. T ex

$= \sin(x - (A - x)) = \sin(2x - A)$

ser man klarare med formeln skriven med våra tomma parenteser:

$\sin(\ )_1 \cos(\ )_2 \pm \cos(\ )_1 \sin(\ )_2$

eller ”framlänges”:

$\sin[(\ )_1 \pm (\ )_2] = \sin x \cos(A-x) - \cos x \sin(A-x)$,

d v s i ord: sinus för summan (skillnaden) mellan två vinklar är lika med
sinus för den första vinkeln gånger cosinus för den andra vinkeln plus (minus)
cosinus för den första vinkeln gånger sinus för den andra vinkeln.

Så till derivatan för $f(\ ) = (\ )^2$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)_1^{\,2} - (x)_2^{\,2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x + x)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Här har vi använt konjugatregeln ”baklänges”, vilket gett utbrytningen av

Δx ”gratis”!

Sedan jag införde arbetet med tomma parenteser har jag mycket sällan, i härledningen av deriveringsregeln för f( ) = ( )^2, behövt, i täljaren se uttryck av typen $f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + \Delta x - x^2$,
i stället för det korrekta $f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2$

Nyttan med tomma parenteser framstår kanske klarast när de tillämpas på inre derivatan. Vi väljer ett exempel:

(2a) $\frac{d\sin x}{dx}$ = cosx.. Vad blir $\frac{d\sin(x^2)}{dx}$? Vi kan skriva (2a) som

(2b) $\frac{d\sin[\,]}{d[\,]} = \cos[\,]$. Det väsentliga här är att vi på alla tre ställena

har samma symbol, om den är x eller [ ] spelar logiskt sett ingen roll,

men väl pedagogiskt. Om vi till att börja med skriver

$\frac{d\sin[\,]}{dx} = \frac{d\sin[\,]}{d[\,]}\frac{d[\,]}{dx} = \cos[\,]\frac{d[\,]}{dx}$, kan vi i efterhand fylla vad vi vill i de tomma

parenteserna [ ], t ex x^2, och får då $\frac{d\sin(x^2)}{dx} = \frac{d\sin(x^2)}{d[x^2]}\frac{d[x^2]}{dx} = \cos(x^2)\cdot 2x$

Det är alltså viktigt att eleverna **först** skriver ut de **tomma** parenteserna [ ] och **i efterhand** fyller i dem, gärna med färgpenna!

Det kan tyckas att det är onödigt att skriva ut alla dessa parenteser i en mängd formler och härledningar, men det är väl värt besväret, eftersom eleverna på allvar (börjar) förstå strukturer i matematiken.

Anm. De ”förlängningar” som här gjorts för kedjeregeln, är utan bevis, som fordrar användande av limes-övergångar, vilka överlämnas till aktuell lärare! Till slut kan vi väl med fog hävda *”Den tomma parentesen är en innehållsrik symbol redan innan den är fylld*!”?