

2:a-gradsekvationen

Utgå från ekvationen

$$(1) \quad z^2 = k, \text{ där } k > 0. \text{ Denna ekvation har ju lösningen } z = \pm\sqrt{k}.$$

Men hur löser man en ekvation av typen

$$(2) \quad x^2 + px + q = 0 \quad ?$$

$$(1) \quad \text{kan även skrivas } (\quad)^2 = k \Leftrightarrow (\quad) = \pm\sqrt{k}$$

$$(2) \quad \text{Vi vill gärna skriva om (2) på formen } (\quad)^2 = k.$$

Men hur kan man göra det? Genom att använda kvadreringsregeln

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2. \text{ Använd denna för att skriva om:}$$

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot (p/2) \cdot x + q =$$

$$= x^2 + 2 \cdot (p/2) \cdot x + (p/2)^2 - (p/2)^2 + q \Rightarrow$$

$$(x+p/2)^2 - (p/2)^2 + q = 0$$

Man säger att man har kvadratkompletterat vänster led.

$$(2) \quad \text{kan alltså även skrivas } (x+p/2)^2 - (p/2)^2 + q = 0 \text{ eller}$$

$$(x + p/2)^2 = (p/2)^2 - q \text{ eller } (x + p/2) = \pm\sqrt{((p/2)^2 - q)}$$

Alltså till sist:

$$(3) \quad \underline{x = -p/2 \pm \sqrt{((p/2)^2 - q)}}$$

$$\text{Exempel: } x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -3/2 \pm \sqrt{((3/2)^2 - (-10))} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3/2 \pm \sqrt{(9/4 + 40/4)} \Leftrightarrow \underline{x = -3/2 \pm 7/2} \Leftrightarrow \underline{x = 2 \text{ eller } x = -5}$$

Enklare: $x^2 + 3x - 10 = (x - x_1)(x - x_2) = 0$

Vi vet att $10 = 1 \cdot 10$ eller att $10 = 2 \cdot 5$. Men om x är heltal måste $x_1 = \pm 1$ och $x_2 = \pm 10$, eller $x_1 = \pm 2$ och $x_2 = \pm 5$.

Men $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -(x_1 + x_2) = 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -3$, samt $x_1x_2 = -10$.

Med $x = 2$ $x_2 = -5$ stämmer detta med förra lösningens svar!

Med vetskapen att $10 = 1 \cdot 10$ eller att $10 = 2 \cdot 5$ kan vi göra ansatsen $(x - ?_1)(x - ?_2) = (x \pm 5)(x \pm 2)$. Vi vet att $5 - 2 = 3$, d v s

vi väljer $?_1 = -2$ och $?_2 = +5 \Rightarrow x_1 - 2 = 0$ och $x_2 + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = +2$ och $x_2 = -5$