## 2:a-gradsfunktioner

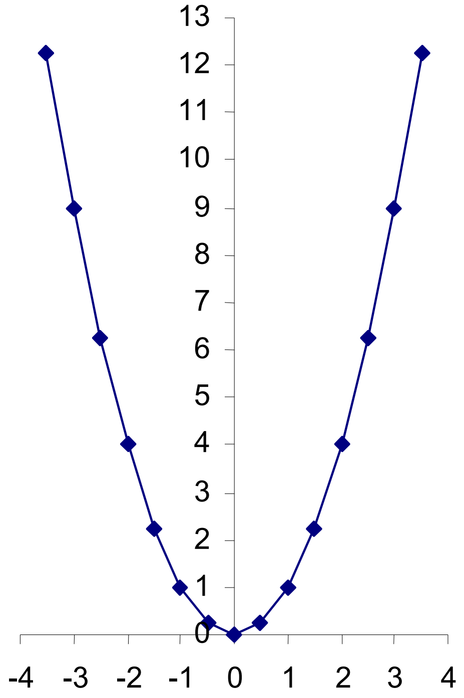
Man kan lämpligen starta studiet av 2:a-gradsfunktioner med en grundfunktion

$$f(\ \ ) = (\ \ )^2 ,$$

som ofta anges med funktionsvärdet $f(x) = x^2$ eller $y = x^2$.

Rita grafen noggrant:

| | |
|---|---|
| -3,5 | 12,25 |
| -3 | 9 |
| -2,5 | 6,25 |
| -2 | 4 |
| -1,5 | 2,25 |
| -1 | 1 |
| -0,5 | 0,25 |
| 0 | 0 |
| 0,5 | 0,25 |
| 1 | 1 |
| 1,5 | 2,25 |
| 2 | 4 |
| 2,5 | 6,25 |
| 3 | 9 |
| 3,5 | 12,25 |




Jag kallar denna graf för grundkurvan. Observera att den är symmetrisk kring y-axeln.

Definitionsmängden är i detta fall $D_f = [-3,5 ; 3,5]$ och

värdemängden blir $V_f = [0 ; 12,25]$

Om vi låter definitionsmängden vara hela x-axeln blir värdemängden hela den positiva y-axeln inklusive origo.

Låt i stället $D_f = \{-2, -3/2, 1, 5/2, \}$

Då blir $V_f = \{4, 9/4, 1, 25/4\}$

Obs! Endast dessa punkter skall med i grafen!

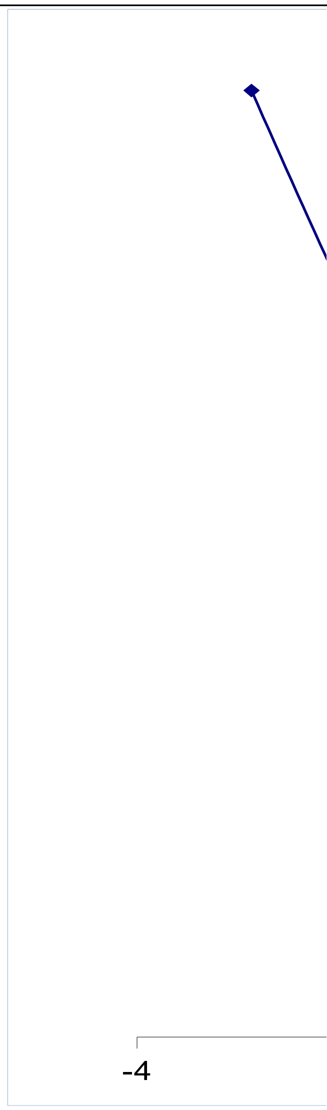
Vi jämför sedan $f(\ \ ) = (\ \ )^2$ med

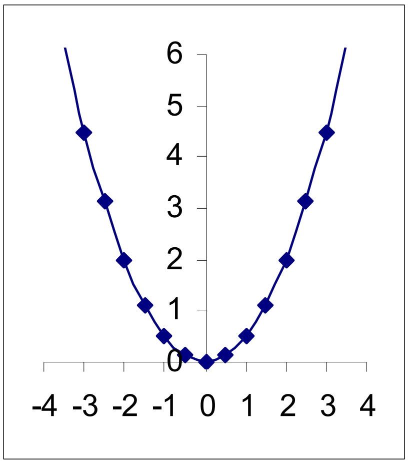
$f(\ \ ) = 2(\ \ )^2$ :

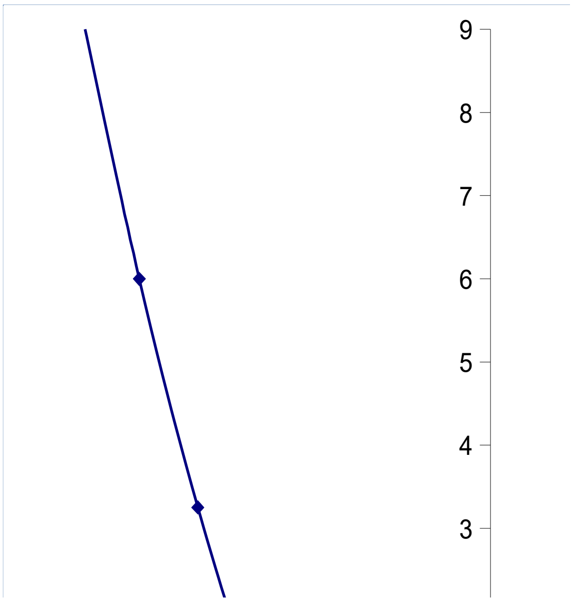
och ser då att kurvan blir spetsigare.

Här är markerat $D_f = [-3,5 ; 3.5]$.

Då blir $V_f = [0 ; 24,25]$



| | |
|---|---|
| Jämför också med  f (   ) = (   )²/2<br>Kurvan blir flackare Man ser att om<br>koefficienten framför  $x^2$-termen är ≠ 1<br>så ändras formen på kurvan. |  |

| | |
|---|---|
| f (   ) =  (   )² – 3   är grundkurvan sänkt<br>3 enheter i y-led.<br><br>Här är det tänkt att  $D_f$ = **R.**<br>Då blir  $V_f$ = [-3, ∞ [ |  |

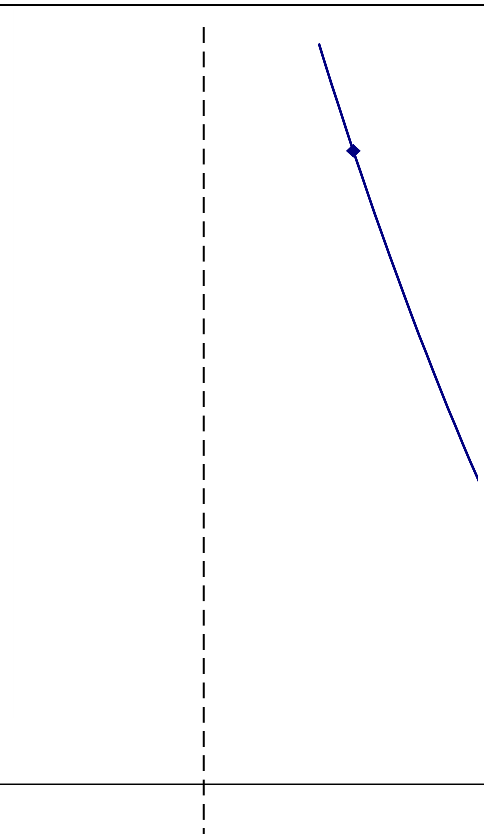
Symmetrilinje:   x = 1

Nästa exempel är $f(\;\;) = (\;\;)^2 - 4(\;\;) - 1$.

Vi skriver om den genom att kvadratkomplettera:

$y = f(x) = (x-2)^2 - 5$

Funktionen har alltså minimum i (2, -5)

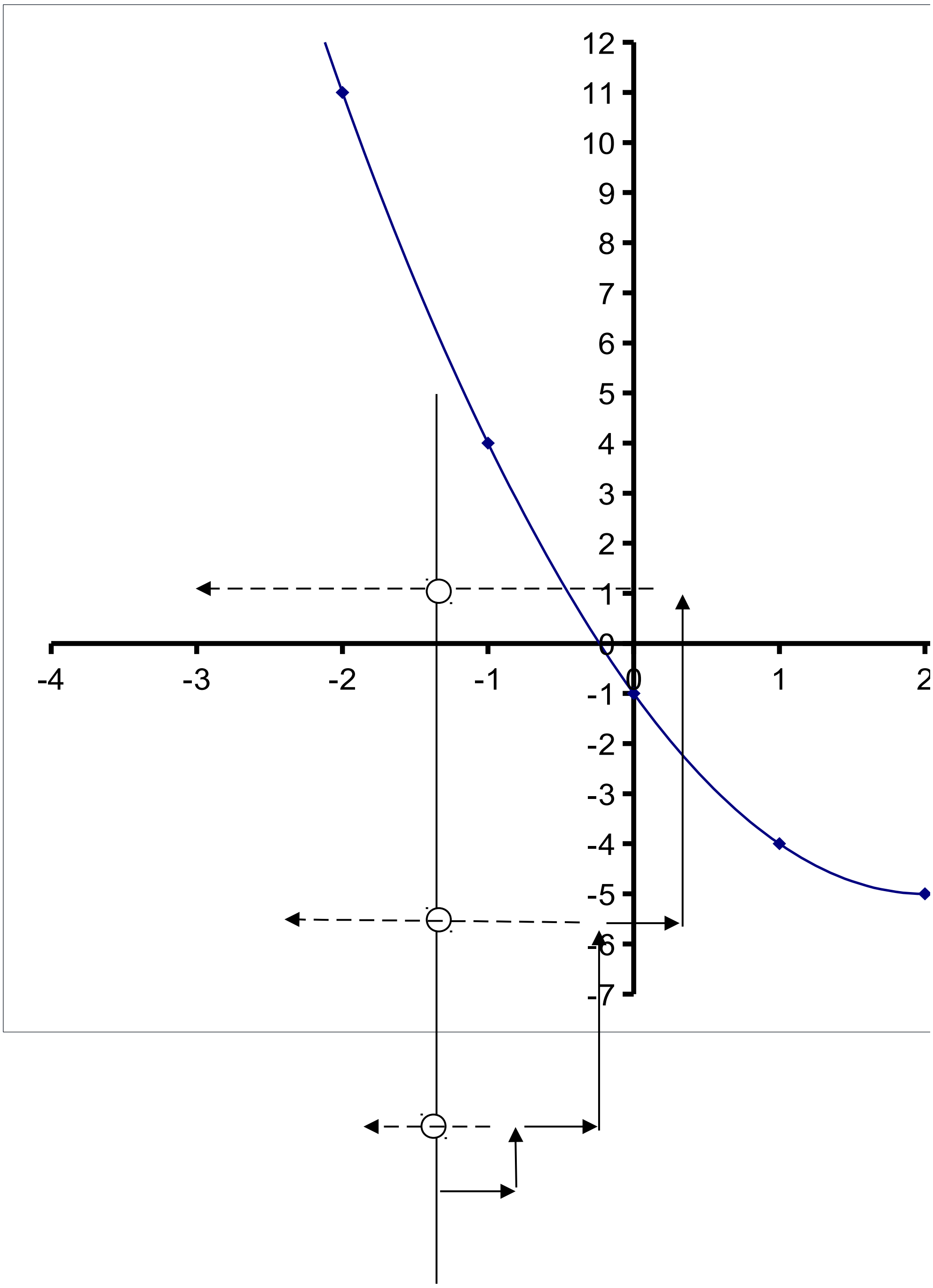


Symmetrilinje: $x = 2$

Vi kan av dessa studier dra slutsatsen att 2:a-gradsfunktionen med koefficienten +1 eller –1 framför 2:a-gradstermen, d v s är på formen $f(\;\;) = (\;\;)^2 + a\cdot(\;\;) + b$, eller $f(\;\;) = -(\;\;)^2 + a\cdot(\;\;) + b$ eller ofta skrivet $y = \pm x^2 + ax + b$, alltid har samma form som grundkurvan: $f(\;\;) = (\;\;)^2$. Den är då enkel att rita (för k = 1):

Kvadratkomlettera, markera minimipunkten, gå en enhet (steg) åt höger, sedan 1 steg uppåt, markera denna punkt, ta ännu ett steg åt höger och gå sedan 3 steg uppåt o s v. Spegla till sist över till andra sidan av symmetrilinjen. Se figuren nedan.

Gör motsvarande nedåt, om du har minustecken framför $(\;\;)^2$-termen.


12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-4
-3
-2
-1
0
1
2

För att konstruera

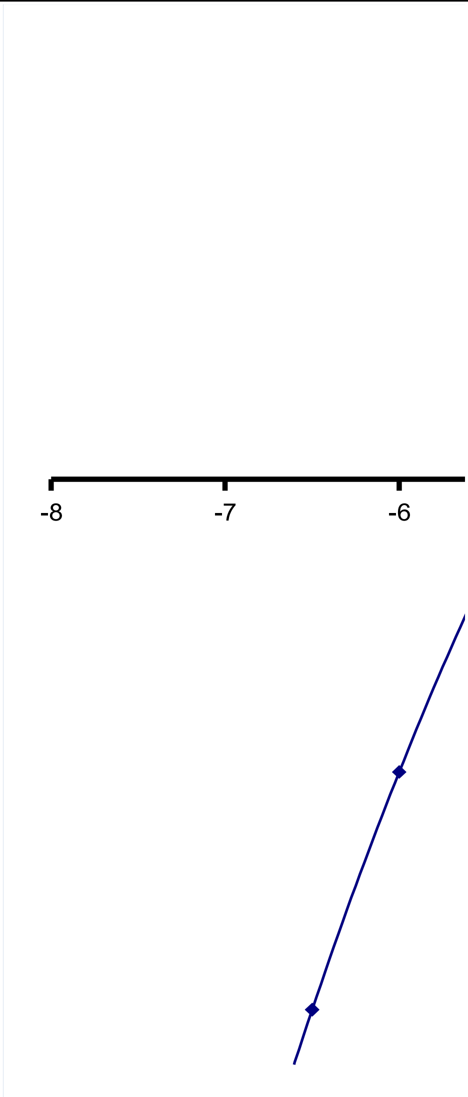
$f(\ ) = -2(\ )^2 - 12\odot(\ ) - 8$ kan man först skriva om:

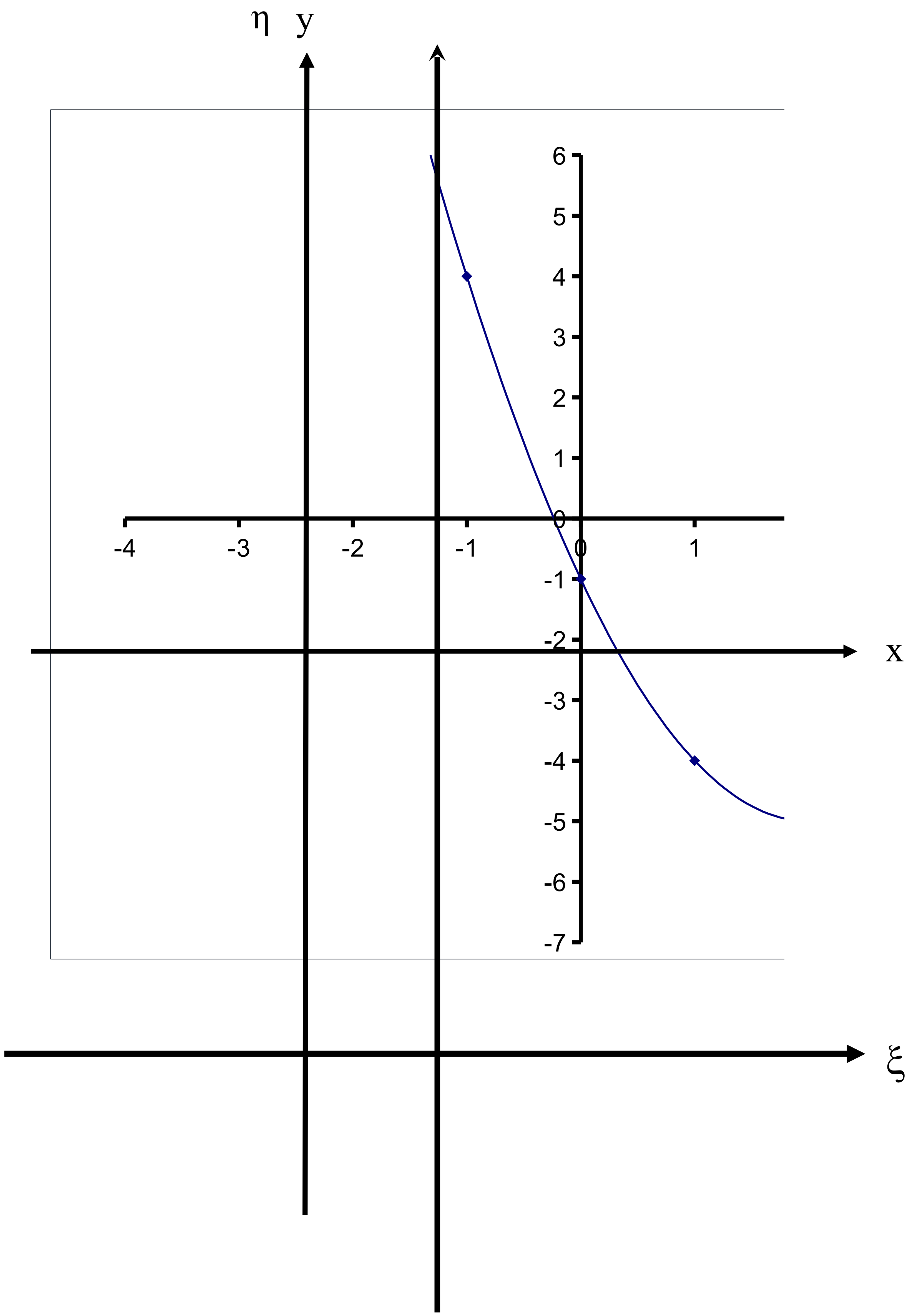
$f(x) = -2(x)^2 - 12\odot(x) - 8 =$

$= -2(x^2 + 6x + 4) = -2((x+3)^2 - 5) =$

$= 10 - 2(x+3)^2.$

Då får man maximivärdet 10 för $x = -3$.





η
y
x
ξ
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-4
-3
-2
-1
0
1

Vi kan skriva funktionen $f(x) + 5 = (x–2)^2$ eller som $y – (–5) = (x–2)^2$

Om vi väljer nya axlar $\xi = x – 2$ och $\eta = y – (–5)$ med origo i minimipunkten (2, -5) blir funktionen på formen $\eta = \xi^2$ d v s på enklaste form, som ju är bekvämare att arbeta med.

Vi ser att $\xi$ = x – minimumpunktens x-koordinat och att

$\eta$ = y – minimumpunktens y-koordinat.

Jag vill varmt rekommendera att man låter eleverna flitigt öva på kvadratkomplettering, eftersom denna är så bra för förståelsen av 2:a-gradsfunktionen, med dess konstruktion, dess symmetriaxel, för lösningen av 2:a-gradsekvationen, för lösandet av allehanda problem, t ex där $a + b + \sqrt{(ab)}$ ingår, m m.