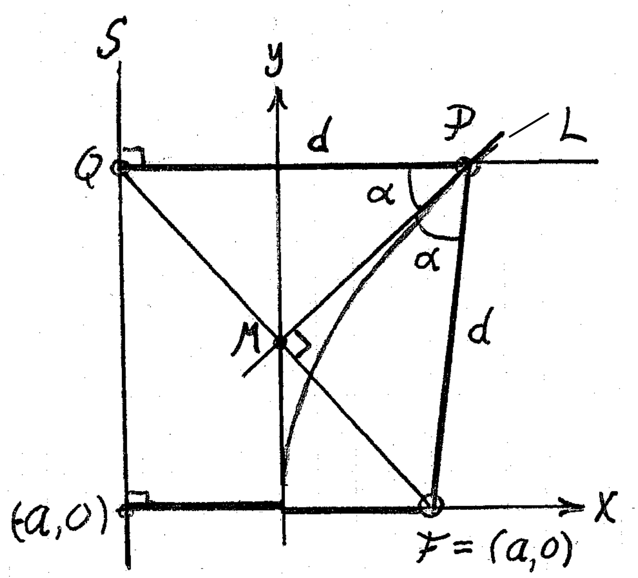
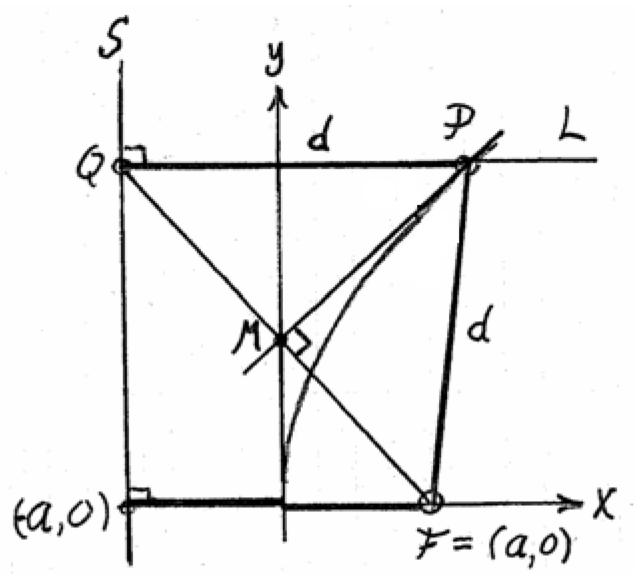
Kägelsnitt

Parabeln.

Låt ***F*** vara parabelns brännpunkt (fokus). Enligt definitionen skall varje punkt ***P*** på parabeln ha samma avstånd från fokus ***F*** som till styrlinjen ***S***. Lägg in ett koordinatsystem med fokus i *(a,0)* och styrlinjen ***S*** i $x = -a$.





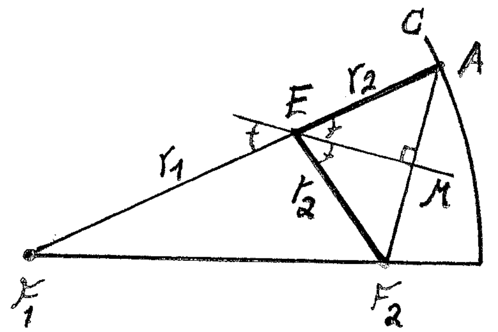
Drag en linje ***L*** parallell med x-axeln genom en (godtycklig) punkt ***Q*** på styrlinjen. Mittpunktsnormalen ***MP*** till sträckan ***FQ*** skär ***L*** i en punkt ***P***, som kommer att ligga på parabeln, eftersom |***FP***| = |***QP***|.

Alla punkter på parabeln kan fås enligt konstruktionen ovan. Vi visar nu att ***MP*** är tangent till parabeln. Antag att ***MP*** inte är en tangent, utan en sekant, d v s skär parabeln även i en punkt ***R***. Låt ***T*** vara den punkt på styrlinjen sådan att **TR** är parallell med x-axeln. Då måste ***PR*** vara vinkelrät mot både ***QF*** och ***TF*** , vilket är omöjligt eftersom ***QF*** och ***TF*** har olika riktningar. Alltså är ***MP*** tangent till parabeln.

Ellipsen

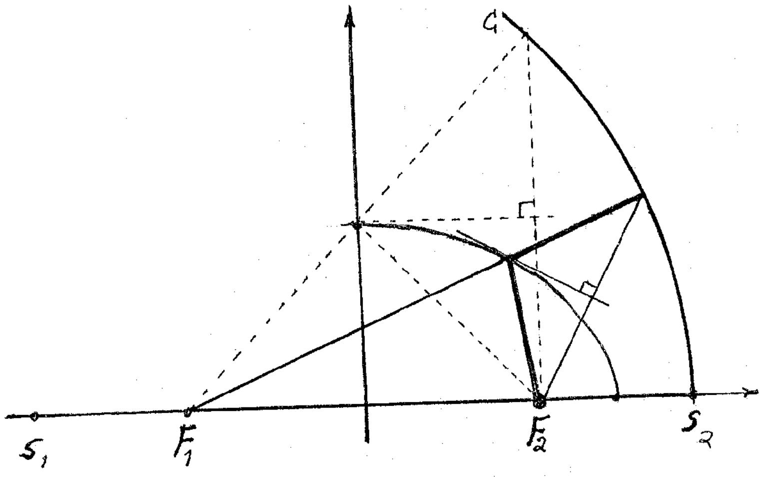
Låt $\boldsymbol{F_1}$ och $\boldsymbol{F_2}$ vara ellipsens brännpunkter med 'radierna' $\boldsymbol{r_1}$ och $\boldsymbol{r_2}$**,** d.v.s. avståndet från en punkt ***E*** på ellipsen till resp. brännpunkt. Enligt definitionen så är $\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2} = |\boldsymbol{EF_1}| + |\boldsymbol{EF_2}| = \boldsymbol{R}$ (konstant). Nu skall vi konstruera en punkt ***E*** på ellipsen.

Rita en cirkelbåge ***C*** med radie ***R*** (ellipsens 'storaxel') och centrum i $\boldsymbol{F_1}$.
Dra därefter en godtycklig rät linje genom $\boldsymbol{F_1}$. Denna linje skär ***C*** i punkten ***A***.
Rita sträckan $\boldsymbol{AF_2}$, med mittpunkt ***M*** och konstruera sedan $\boldsymbol{AF_2}$|:s mittpunkts-normal, som skär $\boldsymbol{AF_1}$ i **E**. Triangeln $\boldsymbol{AEF_2}$ blir då likbent med $|\boldsymbol{EA}| = |\boldsymbol{EF_2}|$ och $|\boldsymbol{EF_1}| + |\boldsymbol{EF_2}| = \boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2}$. Alltså är ***E*** en punkt på ellipsen.



Man bevisar att ME är en tangent till ellipsen, analogt med beviset för en parabel.

Enklast är att konstruera ellipsen i första kvadranten och sedan spegla den i koordinataxlarna. Alternativt kan man använda punkter A kring hela cirkeln C. Mittpunktsnormalen till AF_2 skär alltid AF_1 i en punkt på ellipsen.
Enkel vinkelgeometri ger lika vinklar enligt figuren, vilket visar att alla strålar reflekteras från den ena brännpunkten till den andra.

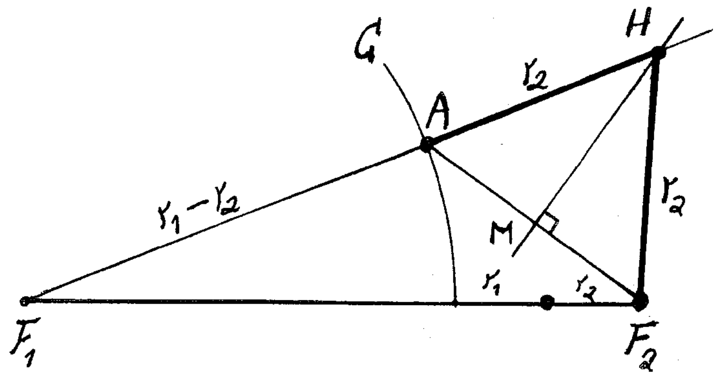


Rotation av ellipsen kring x-axeln ger en 'ellipsoid', som också den har egenskapen att reflektera strålar (eller ljudvågor) från den ena brännpunkten till den andra.

Hyperbeln.

Låt F_1 och F_2 vara hyperbelns brännpunkter med radierna r_1 och r_2, där skillnaden i avstånd från en punkt H på hyperbeln till respektive brännpunkt är konstant, d.v.s. $r_1 - r_2 = |HF_1| - |HF_2| = R$ (konstant).

Rita en cirkelbåge C med radien R och centrum i F_1. Dra därefter en rät linje genom F_1, som skär C i punkten A. Rita sträckan AF_2 med medelpunkt M och konstruera AF_2:s mittpunksnormal, som skär förlängningen av F_1A i H.
Triangeln AHF_2 blir då likbent med $|HA| = |HF_2|$ och $|HF_1| - |HF_2| =$
$= |HF_1| - |HA| = R$. Alltså är H en punkt på hyperbeln.



Man bevisar att ***MH*** är en tangent till hyperbeln, analogt med beviset för en parabel.

Alla strålar från den ena brännpunkten (i figuren F_2) reflekteras i hyperbeln, så att de tycks komma från den andra brännpunkten (i figuren F_1). Låter man hyperbeln rotera kring x-axeln, får man en 'hyperboloid' med samma egenskap**,** då strålar (även ljudvågor) från ena brännpunkten reflekteras i hyperboloidytan.

Svante Silvén

Svante Silvén är pensionerad lektor i matematik och fysik vid Älvkullegymnasiet i Karlstad.