3:e-gradsekvationen

Den allmänna 3:e-gradsekvationen kan skrivas

$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$

Sätt $z = x - p/3$, som ger $(x - p/3)^3 + p(x - p/3)^2 + q(x - p/3) + r = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 - 3x^2p/3 + 3x(p/3)^2 - (p/3)^3 + px^2 - 2xp^2/3 + (p/3)^3 + qx - qp/3 + r = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 + (q - p^2/3)x + 2p^3/27 - pq/3 + r = 0$, som vi låter bli ekvivalent med

(1) $x^3 + 3ax - 2b = 0$

där $a = q - p^2/3$ och $b = pq/6 - p^3/27$

Sätt $x = u + v \Rightarrow x^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvx \Rightarrow$

$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$, som vi vill ha ekvivalent med (1) $\Rightarrow$

$uv = -a$ och $u^3 + v^3 = 2b$. Förläng sistnämnda likhet med u^3. Vi får då

$u^6 + (uv)^3 - 2bu^3 = 0$ d v s vi får

$(u^3)^2 - 2bu^3 - a^3 = 0$ med lösningarna (fullständig symmetri mellan u och v)

$u^3 = b + \sqrt{a^3 + b^2}$
$v^3 = b - \sqrt{a^3 + b^2}$

$x = u + v$ ger till slut en reell rot

$$x_1 = \sqrt[3]{b + \sqrt{a^3 + b^2}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{a^3 + b^2}}$$

Men (1) har ytterligare två rötter:

$x^3 + 3ax - 2b = (x - x_1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A - x_1)x^2 + (B - Ax_1)x - Bx_1 \Rightarrow$

x^2: $A - x_1 = 0 \Rightarrow A = x_1$

x: $B - Ax_1 = 3a \Rightarrow B = x_1^2 + 3a$

x^o: $-Bx_1 = -2b \Leftrightarrow (x_1^2 + 3a)x_1 = 2b \Leftrightarrow x_1^3 + 3ax_1 - 2b = 0$, som sig bör, x_1 är ju en rot.

Alltså:

$$x^3 + 3ax - 2b = (x - x_1)(x^2 + x_1 x + x_1^2 + 3a) = 0$$

$$x^2 + x_1 x + x_1^2 + 3a = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{x_1}{2} \pm \sqrt{x_1^2/4 - x_1^2 - 3a} = -\frac{u+v}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(u+v)^2 - 4uv} =$$

$$= -\frac{u+v}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(u-v)^2} = -\frac{u+v}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) \quad \text{d v s}$$

$$x_2 = -\frac{u+v}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$$

$$x_3 = -\frac{u+v}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{b + \sqrt{a^3 + b^2}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{a^3 + b^2}}$$

$$a = q - p^2/3 \quad \text{och} \quad b = pq/6 - p^3/27$$