Snabbkurs i trigonometri.

Definitionerna av cos, sin och tan m h a rätvinklig triangel visar sig för snäva. Hur behandlar man trubbvinkliga trianglar?

Man har därför infört definitioner av cos, sin, tan och cot som kan ta värden för även stora vinklar, både positiva och negativa, vilket är ofta oundgängligt i fysiken. El-spänningen i våra hem beskrivs bra av formeln $U = 311 \text{ volt} \cdot \sin(100\pi \cdot t)$ $(311 \approx 220\sqrt{2})$, en dämpad svängning, elektrisk eller mekanisk, följer bra av formeln $y = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \phi)$, där i båda fallen t är symbol för tiden. Måhända blir svängningen dämpad till hälften, dvs $y = A/2$, för $\omega t + \phi = 500°$.

Vi startar, med ett vinkelmått som i motsats till ° duger i alla sammanhang, nämligen radian, eller med annat namn, bågmått.

1 radian, 1 bågmått är den vinkel man får då man lägger 1 radie utefter cirkelbågen.

Av bekvämlighetsskäl låter man radien r ha måtetalet 1.

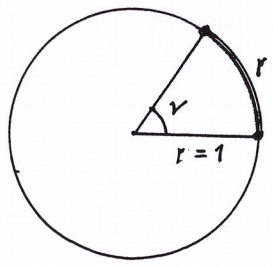


Fig. 1

Eftersom 1 varv är 360° och cirkelns omkrets ges av $O = 2\pi r$, får vi direkt att

2π radianer $= 360° \Rightarrow 1$ radian $= \left(\frac{180}{\pi}\right)° \approx 57{,}30°$ och att

$1° = \frac{\pi}{180}$ radianer $\approx 0{,}0175$ radianer.

Om detta är nytt för dig, tag en paus på några minuter, sträck på dej, tänk på något helt annat-intressant. Återgå, repetera under några minuter, pausa kort igen! Starta på nästa avsnitt!

Vi närmar oss de **gene**-rella definitionerna. Läget av punkten P kan bestämma, antingen mha (x, y), dvs genom att "promenera" utefter x- resp y-axel, eller genom att ta ut "komavsriktningen v och sedan "promenera" utefter radien till P. Cirkeln i fig. 2 kallas av naturliga skäl för <u>enhetscirkeln.</u>

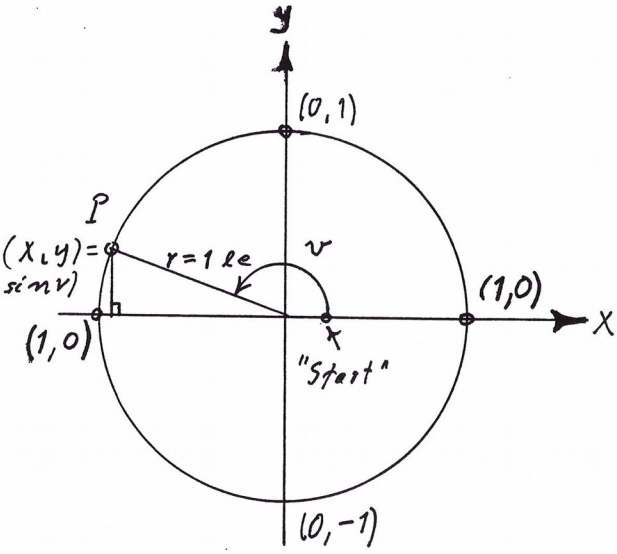


Fig. 2

Vi framhäver punkten P:s beroende av vinkeln v genom att definiera sålunda:

cosinus för $v = \cos v$ är x-koordinaten för den punkt P på enhetscirkeln som bestäms av vinkeln v, analogt för $\sin v$.

Kortare:

$$\begin{cases} \cos v \overset{d}{=} x \\ \sin v \overset{d}{=} y \end{cases}$$

Dessutom:

$$\begin{cases} \tan v \overset{d}{=} \frac{y}{x} = \frac{\sin v}{\sin v} \\ \cot v \overset{d}{=} \frac{1}{\tan v} = \frac{\cos v}{\sin v} \end{cases}$$

med $x \neq 0$ och $y \neq 0$ i resp. fall.

Tag en kort paus!. Sedan:

Hur hänger dessa definitioner i hop med den ur ha rätvinklig triangel? Likformighet ger svaret à la fig. 3.

För vissa vinklar blir det lätt bestämma exakta värden av de trigonometriska funktionerna:

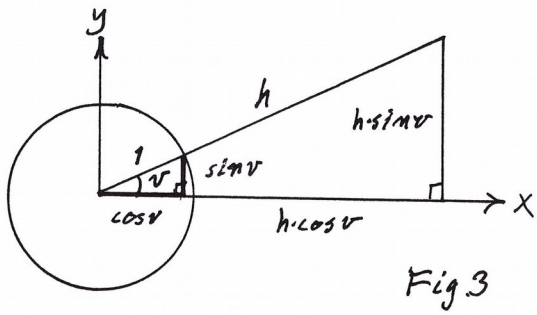


Fig 3

$\cos 0 = 1$; $\sin 0 = \tan 0 = 0$

$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\sin \frac{3\pi}{2} = 0$

$\cos \pi = -1$; $\sin \pi = 0$

$\cot \frac{\pi}{2} = \cot \frac{3\pi}{2} = 0$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

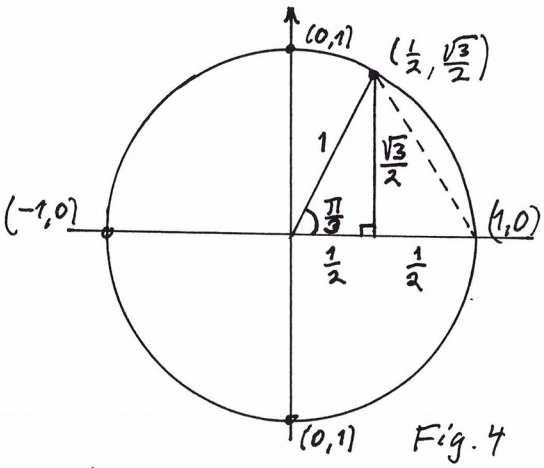


Fig. 4

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$

Andra exakta värden finner du i formelsamlingen.

Vissa enkla samband framgår av fig. 5, t ex:

$\sin(\pi - v) = \sin v$; $\sin(-v) - \sin v$

$\cos(\pi - v) = -\cos v$; $\cos(\pm v) = \cos v$

$\tan(\pi + v) = \tan v$; $\cot(\pi + v) = \cot v$

$\tan(\pi - v) = -\tan v$ osv.

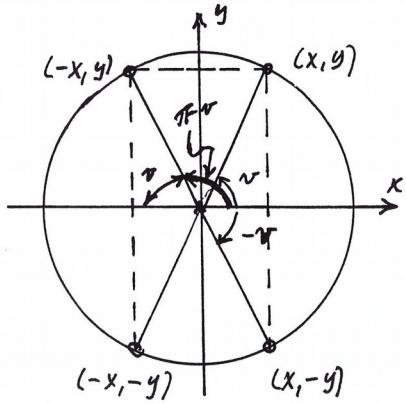


Fig. 5

Tid för paus!

I första kvadranten blir kateternas längder cos v, och sin v i den rätvinkliga triangeln med hypotenusalängden 1. Hur kan tan v fås? Se fig. 6 Bevisa detta! Rita själv ut hur cot v kan fås.

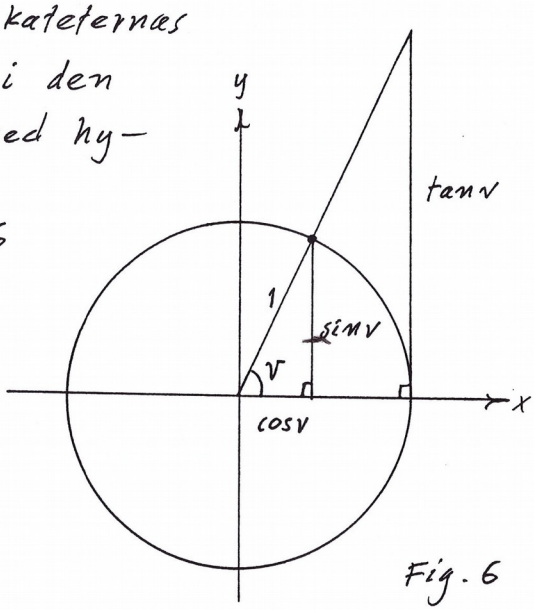


Fig. 6

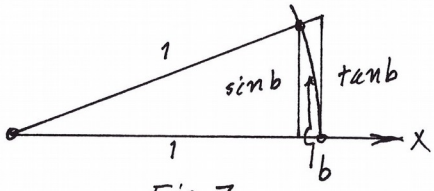


Fig. 7

Fig. 6 påvisar (ej bevis!) att $\sin b \approx \tan b \approx b$ för små vinklar b.. Som en första approximation har man valt att $|b| < 5°$. Men $\sin b \approx b$ ($\approx \tan b$) gäller endast om b mäts i radianer, eller vad sägs om att $\sin 5° \approx 0{,}087 \wedge \sin 5° \approx 5$?!? Astronomer använder denna approximation mycket ofta.

De två med räta vinklar markerade blir kongruenta p g a de lika bågarna b. Vi ser direkt att

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \cos b = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - b\right) \\ y &= \sin b = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - b\right) \end{aligned}}$$

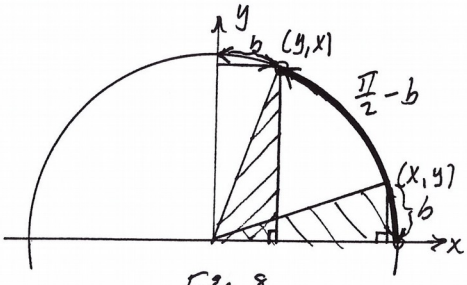


Fig. 8

Analogt resonemang för trianglar i övriga kvadranter ger samma.

Paus rekommenderas!

Dessa formler ger direkt att

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)} = \frac{\cos b}{\sin b} = \cot b = \frac{1}{\tan b}$$

och $\cot\left(\frac{\pi}{2}-b\right) = \frac{1}{\cot b} = \tan b$

Arean av en triangel med två sidor och mellanliggande vinkel givna?

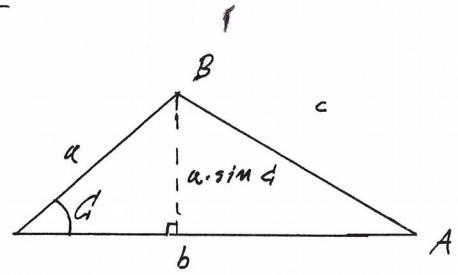


Fig. 9

Fig. 9 ger direkt

$$T = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ac\sin B}{2}$$ (pga sym. de två sista uttrycken)

Areasatsen

Förlänges hela areasatsen med $\frac{2}{abc}$ får vi sinussatsen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Fig. 10 och Pytagoras sats ger att

$|\cos v|^2 + |\sin v|^2 = 1^2 \Leftrightarrow$

$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ $\forall$ vinklar!

Trigonometriska ettan.

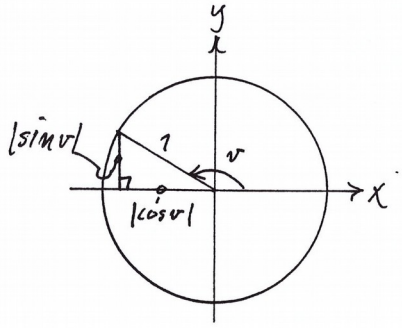


Fig. 10

Får jag tjäta om paus igen?

Vilka samband har man i en triangel med tre sidor a, b och c givna?

Pytagoras sats:

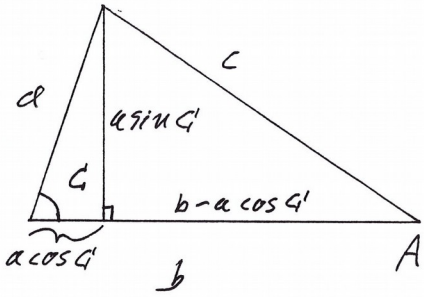


Fig. 11

$$c^2 = (a \cdot \sin G)^2 + (b - a \cdot \cos G)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

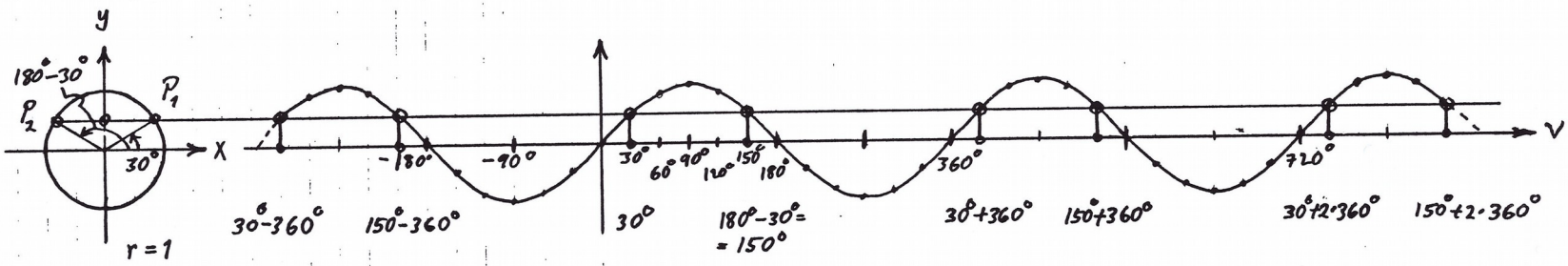
$$c^2 = a^2 \sin^2 G + b^2 - 2ab\cos G + a^2\cos^2 G = a^2(\cos^2 G + \sin^2 G) = a^2$$

$\therefore$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos G$ och analogt för $c \to a \to b$ och $A \to B$. $90° \leq G < 180°$ ger samma formel!

Cosinusatsen var namnet och är en generalisering av Pytagoras sats, som fås för $G = 90°$.

Komplettera gärna denna lilla kurs genom att läsa i din lärobok!

Lösning av "typen" $\sin v = a$



<u>Ex.</u> Vi skall lösa ekv. $\sin v = 0{,}5$ fullständigt.

Vi vet att $\sin 30° = 1/2 = 0{,}5$

<u>En</u> lösning är alltså $v_1 = 30°$, men på enhetscirkeln finns ytterligare ett läge P_2 som ger $\sin v = 0{,}5$.

En <u>andra</u> lösning blir följaktligen $v_2 = 180° - 30°$

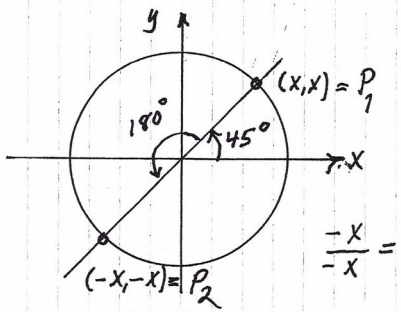
Men om vi går runt ett helt antal varv $n \cdot 360°$ på enhetscirkeln, återkommer vi till samma läge P_1 eller P_2.

Fullständig lösning blir alltså

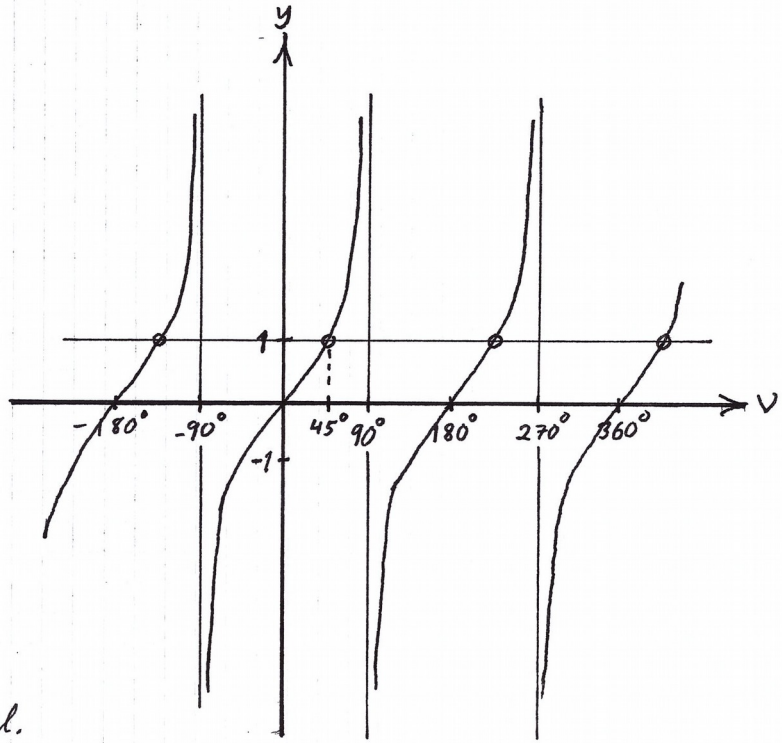
$$\begin{cases} v_1 = 30° + n \cdot 360° \\ v_2 = 180° - 30° + n \cdot 360° \; (= 150° + n \cdot 360°) \end{cases}$$

Lösning av "typen" $\tan v = \alpha$

Ex. Vi skall lösa ekv. $\tan v = 1$ fullständigt. Vi vet att $\tan 45° = 1$.
En lösning är alltså $v_1 = 45°$, men på enhetscirkeln finns ännu ett läge P_2 som ger $\tan v = 1$:



$$\frac{-x}{-x} = 1 = \tan(180° + v_1)$$



En andra lösning är alltså
$v_2 = v_1 + 180° = 45° + 180° = 225°$
Men varje gång vi adderar 180° till v_1 eller v_2 hamnar vi på punkterna P_1 eller P_2

Fullständig lösning blir alltså
$v = 45° + n \cdot 180°$, där n är ett heltal.

Svante Silver, 2017